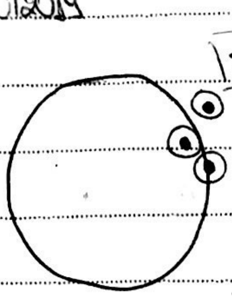
22/10/2019



ΙΣΟΣ **Ορισμός:** Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοικτό αν $\forall \bar{x} \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

κλειστό αν το $\mathbb{R}^n \setminus U$ είναι ανοικτό.

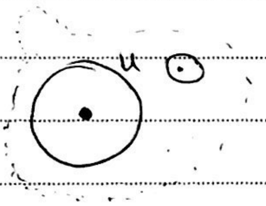
$① := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon\}$

Παρατήρηση: ① Το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται (είναι) και ανοικτά και κλειστά.

② Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά.

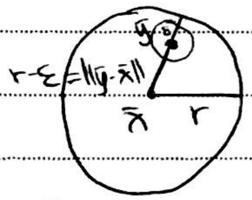
③ Από το ② προκύπτει:

Αν ένα σύνολο δεν είναι ανοικτό (κλειστό) δεν σημαίνει ότι είναι κλειστό (ανοικτό).



Παράδειγμα: Η λεγόμενη ανοικτή μπάλα κέντρου $\bar{x}$ και ακτίνας $r > 0$

$B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \ \|\bar{y} - \bar{x}\| < r\}$ είναι ανοικτό σύνολο (ανοικτή)



Απόδειξη: Πρέπει και αρκεί να δείξω (από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου) ότι $\forall \underbrace{\bar{y} \in B(\bar{x}, r)}_{=U}$, $\exists \varepsilon > 0 \ B(\bar{y}, \varepsilon) \subset \underbrace{B(\bar{x}, r)}_{=U}$

Έστω $\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$

$\Leftrightarrow \|\bar{y} - \bar{x}\| < r$

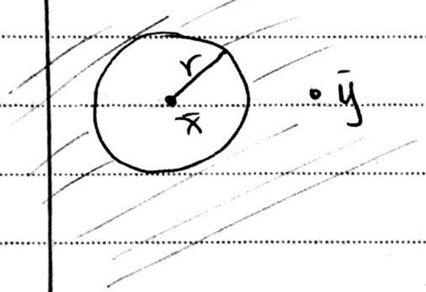
Άρα έχουμε $\|\bar{y} - \bar{x}\| < r$ δηλ. $\exists \varepsilon > 0$. $\|\bar{y} - \bar{x}\| = r - \varepsilon$

Ισχυρισμός: $B(\bar{y}, \varepsilon) \subset B(\bar{x}, r)$ δηλ. Ν.δ.ο. $\|\bar{z} - \bar{y}\| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\bar{z} - \bar{x}\| < r$

Όμως, από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε $\|\bar{z} - \bar{x}\| = \|(\bar{z} - \bar{y}) + (\bar{y} - \bar{x})\|$
$\leq \underbrace{\|\bar{z} - \bar{y}\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\bar{y} - \bar{x}\|}_{=r-\varepsilon} < \varepsilon + r - \varepsilon = r$ $\boxed{\checkmark}$

Επίσης, η κλειστή μπάλα $\underbrace{\bar{B}(\bar{x}, r)}_{= \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| \le r\}}$, $r>0$, είναι κλειστό σύνολο

Πρέπει και αρκεί να δείξω ότι το $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, r) =$
$= \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| \le r\} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| > r\}$



Άρα, έστω $\|\bar{y} - \bar{x}\| > r$. Θ.ν.δ.ο. $\underbrace{\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{y}, \varepsilon) \subset}$ $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, r)}$

δηλ. $\forall \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{z} - \bar{y}\| < \varepsilon$
ισχύει $\|\bar{z} - \bar{x}\| > r$

[Θέτω $\|\bar{y} - \bar{x}\| = r + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$
και χρησιμοποιώ την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα
$\big| \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \big| \le \|\bar{x} - \bar{y}\|$ → Άσκηση
και το υπόλοιπο είναι άσκηση]